Calcolo di limiti mediante limiti notevoli- esercizi svolti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx}$$

Sostituendo 0 al posto di x si ha la forma $\frac{0}{0}$.

Ricordiamo i limiti notevoli

$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ per cui dividiamo al numeratore e denominatore per x e al numeratore aggiungiamo e sottraiamo 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1-(e^{-x}0-1)}{x}}{\frac{senx}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)+\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)}{\frac{senx}{x}}=2$$

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{senx}$$

Ricordiamo i limiti notevoli

$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ per cui dividiamo numeratore e denominatore per (- x):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{senx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-(e^{-x}-1)}{-x}}{\frac{senx}{-x}}=1$$

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{3x}$$

Ricordiamo i limiti notevoli

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = lna$

Moltiplichiamo e dividiamo per *2x*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-1}$$

Posto $y = x - 1 \quad \rightarrow \quad x = y + 1$ si ha:

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{y+1}-e}{y+1-1} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y \cdot e - e}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e(e^y-1)}{y} = e$$

5. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-cosx}{x^2}$$

Ricordiamo i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 al numeratore, si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} - \frac{(cosx-1)}{x^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

6. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\infty} x[ln(x+a)-lnx]$$

Ricordiamo i limiti notevoli

$$\lim_{X\to 0}\frac{ln(x+1)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[ln\frac{(x+a)}{x}\right]}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Posto $\frac{1}{x}=y$ si ha:

$$\lim_{y\to 0}\frac{ln(1+ay)}{ay}=a$$

$$x\to\infty \quad y\to 0$$

7. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(a+x)-lna}{x}$$

Ricorda il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(a+x)-lna}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}\cdot a}=\frac{1}{a}$$

8. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to e}\frac{lnx-1}{x-e}=\frac{0}{0}$$

Posto: $y=x-e;\quad x\to e\quad y\to 0;\quad x=y-e$ e ricorda il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

si ha:

$$\lim_{y\to 0}\frac{ln(y-e)-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{ln(y-e)-lne}{y}=$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{ln\left(\frac{y-e}{e}\right)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\left(\frac{y}{e}+(-1)\right)}{\frac{y}{e}\cdot e} = \frac{1}{e}$$

9. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 2x}{ln(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 2x}{ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{ln(1+x)}{x}\cdot x} = 2$$

10. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{8^x-7^x}{6^x-5^x} = \frac{0}{0}$$

Ricorda il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

Aggiungo e sottraggo 1 al nominatore e al denominatore:

$$\lim_{x\to 0} \frac{8^x-1-7^x+1}{6^x-1-5^x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(8^x-1)}{x}-\frac{(7^x+1)}{x}}{\frac{6^x-1}{x}-\frac{5^x+1}{x}} =$$

$$= \frac{\ln 8-\ln 7}{\ln 6-\ln 5} = \frac{\ln\frac{8}{7}}{\ln\frac{6}{5}}$$

11.Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x = 1^\infty$$

Ricorda il limite notevole $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Mettiamo in evidenza x al nominatore e al denominatore:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x\left(1+\frac{8}{x}\right)}{x\left(1+\frac{(-2)}{x}\right)}\right)^x = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{8}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{(-2)}{x}\right)^x} = \frac{e^8}{e^{-2}} = e^{10}$$